Le origini

Jens Høyrup

Published pp. 11–36 *in* Claudio Bartocci & Piergiorgio Odifreddi (eds), *La matematica*. Volume primo: *I luoghi e i tempi*. Torino: Einaudi, 2007

1. *Prima della storia, prima della matematica*

Le origini delle prime tecniche matematiche si perdono nella preistoria. Anche in tempi recenti, in culture senza scrittura si potevano costruire case con angoli praticamente retti e indicare quantità – o con parole che indicano numeri, o con elementi materiali come pietre, dita, ecc. Talvolta, in tali culture si sono usate procedure o tecniche di grande raffinatezza matematica che suggeriscono la teoria dei gruppi astratti di simmetria – per esempio, le regole che determinano quali matrimoni sono permessi in una tribù divisa in 12 gruppi e a quale gruppo appartiene un figlio o una figlia. Probabilmente, simili raffinatezze esistevano anche nelle società preistoriche.

Sarebbe del tutto legittimo parlare di tale tecniche come di *matematica* – in un lavoro pionieristico, Dirk Struik parlava infatti di «Stone Age mathematics». Negli ultimi decenni si parla spesso di «etnomatematica» per sottolineare che queste tecniche non sono viste nelle culture di cui fanno parte come componenti di un insieme che corrisponde alla nostra «matematica».

2. *Uruk – una cultura statale di impronta matematica*

Adottando questo punto di vista, la matematica «vera» comincia quando spunta una coordinazione basata su una comprensione, almeno intuitiva, dei rapporti formali fra tecniche di carattere matematico finora isolate le une dalle altre. Con questa definizione, la matematica è coetanea – e non per caso – con la prima scrittura e con la prima organizzazione della società come *stato*. Tutte e tre le cose sembrano emergere nella seconda metà del quarto millennio (avanti Cristo, come tutti i dati di questo capitolo), nel sud dell'Iraq odierno.

In quest'epoca, dei cambiamenti climatici consentirono l'introduzione dell'irrigazione artificiale in questa zona. Già da tempo, la struttura sociale un tempo basata sulla ridistribuzione dei viveri prodotti nel singolo villaggio si era trasformata (almeno nella valle di Susiana, nel vicino Khuzestan vicino) in un sistema centralizzato in cui una parte del prodotto dei singoli villaggi veniva consegnato ai templi di Susa, la città centrale. Con il forte aumento della produzione agricola del sud mesopotamico, un sistema analogo ma ancora più elaborato si costruì intorno alla città di Uruk.

Già la ridistribuzione all'interno dai villaggi era stata basata sulla contabilità. Dall'8000 in poi si usavano in tanti luoghi dell'Anatolia, della Siria, dell'Iraq e dell'Iran gettoni di terracotta con la forma di sfere, cilindri, coni (ecc.) piccoli e grandi. Il contesto archeologico suggerisce che i gettoni simboleggiassero determinate quantità di grano e olio e capi di bestiame, e che servissero in una contabilità all'interno del villaggio. Inoltre, lo stesso contesto indica che il responsabile della ridistribuzione e della la contabilità godeva di alto prestigio sociale. Nella centralizzazione di Susiana si aggiungeva un nuovo livello: adesso i gettoni servivano per controllare le spedizioni alla metropoli, e per essere controllabili venivano rinchiusi dentro dei contenitori sigillati («bullae»). Spesso questi portavano sulla superficie impronte simili ai gettoni contenuti; questo permetteva di leggere il contenuto senza distruggere il documento.

Come primo passo nella trasformazione del sistema, gli amministratori di Uruk scoprirono che quando c'erano le impronte si poteva fare a meno dei gettoni. Cominciarono dunque a fare le impronte su una tavoletta piatta. In una seconda fase crearono un repertorio di un migliaio di logogrammi (segni per parole) che servivano in una contabilità molto più raffinata di quella di Susa, adeguata per quello stato burocratico con almeno tre livelli di controllo e al tempo stesso una divisione estesa del lavoro (stato che non avrebbe potuto crearsi senza il nuovo sistema di contabilità, e che conosciamo soltanto grazie ad esso).[1]

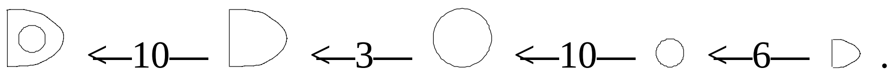
La nuova scrittura aveva dunque due componenti: un repertorio di

---

[1] Non esistono tracce di uno sviluppo graduale; la scrittura sembra veramente essere stata una creazione quasi istantanea.

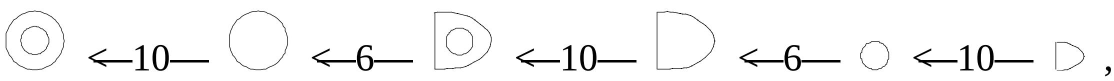
logogrammi (disegni tracciati su tavolette di argilla con uno stilo appuntito[2]) e un repertorio di segni metrologici e numerici prodotti con pressione verticale o obliqua di uno stilo cilindrico (grosso ad un’estremità, fino all’altra). Questi ultimi sembravano dunque raffigurare le sfere e i coni grandi e piccoli del vecchio sistema di gettoni, e sembrano infatti esserne una continuazione. Se la scrittura completa (logogrammi e segni metrologici) deve essere vista come espansione violenta del sistema dei gettoni o invece come una nuova invenzione nella quale veniva innestato questo sistema è una discussione accesa ma abbastanza scolastica, che non ci riguarda.

Ci riguarda invece la relazione fra il vecchio sistema e le nuove notazioni numeriche e metrologiche. I gettoni erano simboli concreti – non ha senso un simbolo per un numero senza un’indicazione della cosa di cui si parla. È quasi sicuro che i vecchi coni e sfere rappresentassero il grano contenuto in specifici contenitori reali, standardizzati ma con un rapporto fra di loro soltanto approssimativo. Nel sistema scritto, i rapporti fra le unità di grano erano invece fisse (la notazione è dovuta a Jöran Friberg):



Una piccola sfera vale dunque 6 piccoli coni, ecc.

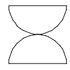
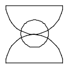
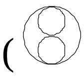
Nella scrittura era anche possibile «separare quantità e qualità», cioè, combinare un simbolo meramente numerico con un logogrammo – per esempio, il simbolo per 2 con il logogrammo «pecora». I simboli fondamentali per i numeri (gli altri numeri venivano composti in modo additivo) costituiscono questa serie:



dove il piccolo cono sta per 1, la piccola sfera di consequenza per 10, e il grande cono per 60. Il simbolo che sta per 600 è interessante, potrebbe essere costruito come 10 volte 60. Poiché le figure coincidono con quelle

[2] Nel terzo millennio, i disegni venivano stilizzati, composti da pressioni oblique di uno stilo prismatico; così la scrittura divenne «cuneiforme». Fino alla fine del terzo millennio si insegnava ancora quale era il disegno sottostante, come dimostrano le varianti dei segni; nel secondo millennio sembra che il disegno fosse dimenticato.

del sistema di grano ma i rapporti (e persino l'ordine) sono differenti e più regolari, questa serie sembra essere una costruzione basata, da una parte, su un sistema pre-esistente di numeri orali e, dall'altra, su riflessioni matematiche, 60 essendo una «grande unità» (con soltanto due estremità dello stilo non era possibile scrivere 3600 con un cono ancora più grande). Forse la numerazione scritta andava già oltre il sistema orale. In ogni caso era già sessagesimale, sebbene non di posizione.

Esisteva un'altra sequenza di numeri scritti, con segni che rappresentano 1, 10, 60, 120 (), 1200 () e 7200 (), usata per scopi specifici – creata probabilmente per facilitare certe procedure burocratiche; una sequenza per le aree, anch'essa il risultato di una normalizzazione matematica che ridefiniva misure «naturali» (d'irrigazione, di semenza) in modo da farle dipendere dalla metrologia per le lunghezze; e una per un calendario amministrativo, dove ogni mese contava 30 giorni e ogni anno 12 mesi (il calendario sacrale invece aveva mesi di 29 o 30 giorni, e anni talvolta di 13 mesi). Sequenze secondarie, per esempio per il malto, usavano i simboli del sistema del grano (con gli stessi valori) ma ornati con piccole strisce.

Un'ultima indicazione che la creazione dei sistemi metro-numerici fosse basata su un pensiero matematico conscio è il modo di scrivere le frazioni: in tutti i sistemi la prima sotto-unità si produceva girando il piccolo cono di 90° in senso orario.

Come si è detto, la formazione di un vero stato fu condizionata in modo decisivo dall'esistenza del nuovo sistema di contabilità. Questo condizionamento si estende ai particolari. Un aspetto essenziale dello stato mesopotamico, non soltanto a Uruk ma fino al collasso del 1600 (v. sotto), è che il potere statale si legittimava come espressione di giustizia sociale – probabilmente perché lo stato era l'erede del vecchio sistema ridistributivo. Grazie ai gettoni, la giustizia ridistributiva fu una giustizia calcolata – e così lo era anche la «giustizia» nello stato di Uruk. I terreni venivano assegnati ai dignitari del tempio secondo rapporti numerici precisi – ciò che fu possibile solo grazie alla nuova metrologia per le aree; il cibo e il foraggio si distribuivano ai lavoratori e al bestiame in razioni fissi, almeno per il bestiame in accordo con il calendario amministrativo – non è chiaro se già a Uruk (come più tardi) i lavoratori dovessero realizzare il lavoro di 30 giorni anche nei mesi che ne avevano solo 29.

Persino il modo di *pensare lo stato* era segnato dalla matematica. La cosiddetta «lista delle professioni» (una delle liste che servivano per insegnare la scrittura) elenca i vari campi di attività, e per ognuno di essi i livelli di capo, di sorvegliante e di lavoratore comune – lo stesso «prodotto cartesiano» che troviamo nelle tavolette di ragioneria.

Non sappiamo nulla sull'organizzazione dell'insegnamento della scrittura e della matematica, ma abbastanza sul suo contenuto. Circa il 15 % delle tavolette contengono liste «lessicali» di logogrammi organizzati in categorie astratte: professioni (già menzionate), luoghi geografici, contenitori, uccelli, ecc. Il resto sono testi amministrativi e di ragioneria. Non esiste un solo testo religioso o letterario, ma fra i testi amministrativi e di ragioneria un sottogruppo deve rappresentare la didattica matematica: essi non contengono il sigillo del funzionario responsabile e contengono numeri troppo grandi o cifre troppo tonde per essere veri. Non c'è traccia di pensiero matematico oltre a questo, né di giochi con numeri né di speculazioni in qualche modo teoriche. La matematica era una componente della cultura statale, e nient'altro.

Non sembra essere soltanto a livello intellettuale che scrittura e matematica fossero pienamente integrate nell'amministrazione; sembra anche che la capacità di scrivere e calcolare fosse strettamente riservata alla casta degli amministratori; una professione di scribi al di fuori di essa non esisteva.

3. *Il millennio sumerico*

Nella prima parte del terzo millennio si sviluppó nel sud mesopotamico un sistema policentrico di città stato guidate da re con funzioni militari. Dopo due o tre secoli senza testimonianze epigrafiche ritorna la scrittura, ora però con rudimentali elementi grammaticali che ci permettono di identificare la lingua scritta come sumerico, sebbene i nomi usati dimostrano che si parlava già anche l'accadico, una lingua semitica di cui il babilonese e l'assiro sono dei dialetti. Dopo il 2400 vi fu una fase di centralizzazione, e verso il 2350 Sargon, un capo accadico, assoggettò tutto il centro e il sud mesopotamico; dapprima il dominio dei successori Sargonidi si estendeva ancora di più nella Susiana, nell'area siriana (dove fu distrutta Ebla, città stato potente che aveva adottato la cultura degli scribi sumeri) e fino all'Anatolia, ma verso il 2200 il loro regno crollò. Dopo un secolo si ebbe una nuova centralizzazione sotto la «terza dinastia di Ur» (dal 2112 al 2004 secondo la «cronologia media»), che riuniva il sud e il centro sotto una amministrazione diretta (su cui ritorneremo), sottomettendo il nord e la Susiana a un dominio meno diretto (e meno duraturo).

Tutti questi sviluppi politici hanno influenzato la matematica. Due tendenze generali si distinguono: in primo luogo, l'uso esteso del principio sessagesimale, cioè, la creazione nei sistemi numerali e metrologici di unità più grandi e sotto-unità più piccole, moltiplicando e dividendo per 60; in secondo luogo, l'adattamento delle metrologie alle procedure amministrative. Queste tendenze generali, ovviamente, non fanno che continuare sviluppi già cominciati nel quarto millennio.

Eppure non tutto fu mera continuazione. Nella città di Shuruppak (c. 2600) e in siti contemporanei sono stati trovati contratti scritti e documenti amministrativi che fanno vedere una struttura sociale complessa, dove gli scribi avevano un ruolo fondamentale e costituivano una vera professione. Sono stati trovati anche un gran numero di testi scolastici. Certuni discendono dalle liste lessicali del quarto millennio. Altri appartengono a nuovi tipi; ci sono testi letterari (un inno, proverbi) e anche problemi matematici non direttamente legati alla pratica, anche se sono formulati come se lo fossero – possiamo parlare di problemi «sopra-utilitari». Per esempio: Un silo di grano viene distribuito a un numero di lavoratori in razioni di 7 sila (litri) per ognuno, il «silo» contenendo 40×60 gur (tonnellate) da 8×60 litri. La risposta (164571 lavoratori col resto di 3 sila) viene data correttamente in una tavoletta, e in un'altra con un errore che svela il metodo (dapprima si divide 2400 per 7, poi si moltiplica il risultato per 480, e si converte il resto di 6 gur in litri, ecc.).

Questo problema appartiene a ciò che sembra essere stato un genere prediletto: la divisione di una quantità grande e tonda (sia numero, sia unità metrologica) per un divisore irregolare (rispetto ai fattori dei sistemi numerale e metrologici). Altri problemi suggeriscono l'inizio dell'interesse per configurazioni geometriche «interessanti» come quattro cerchi iscritti in un quadrato.

L'uso della scrittura per scopi «letterari» e del calcolo in problemi «sopra-utilitari» può vedersi come un modo di provare le potenzialità degli strumenti professionali. Chi era in grado di scrivere, leggere e calcolare fuori dal campo amministrativo, cioè fare delle cose che capivano soltanto gli altri scribi, questi era un vero scriba. È una dinamica che si ripete spesso nella storia; non è diversa la ragione per cui furono spesso gli ingegneri e gli architetti ad abbonarsi nell'Ottocento (dopo Cristo!) al *Journal des mathématiques élémentaires* e a provare il loro virtuosismo professionale sui vari problemi di costruzione geometrica proposte ai lettori.

Nei secoli che seguirono, il potere politico scoprì l'utilità della letteratura per scopi di propaganda; Sargon in particolare faceva riscrivere gli inni religiosi in modo adeguato per il suo regno. La matematica sopra-utilitaria invece non aveva tali impieghi politici. Nell'epoca dei sargonidi vediamo dunque uno sforzo per omogeneizzare le metrologie nel contesto di una ragioneria allargata alla misura del nuovo stato – per esempio, sostituire le varie gur locali con un «gur reale» di 300 sila, un valore che facilitava certi calcoli amministrativi. D'altra parte, la scuola degli scribi continuava a insegnare la matematica sopra-utilitaria – per esempio (fatto importante nel seguito) di trovare una dimensione di un campo rettangolare se l'area e l'altra dimensione sono date. Data la metrologia per le aree, non si tratta di una mera divisione numerica; e ovviamente non è un problema in cui un agrimensore si imbatte nella pratica professionale. Una tavoletta ci fa vedere un esempio più sofisticato di sapere geometrico senza utilità pratica: il fatto che un trapezio viene diviso a metà da una linea parallela alle basi il cui quadrato è la media aritmetica fra i quadrati di esse.

L'evidenza linguistica suggerisce ma non dimostra, che questi indovinelli geometrici sono stati ripresi a scuola (dove tutto era basato sul sumerico) da un ambiente accadico di agrimensori «laici» (cioè, non-scribi). Più certo è invece il fatto che nei secoli successivi questo tipo di sapere veniva trasmesso dentro tale ambiente. Poiché l'agrimensura dipendeva da metrologie una volta create nell'ambiente degli amministratori del quarto millennio, è ovvio che l'ispirazione ultima dell'ambiente laico è stata l'ambiente «dotto»; sul momento della separazione fra i due non sappiamo niente di sicuro. Contratti di Shuruppak su vendite di terreni parlano, oltre che dello scriba, anche di un agrimensore. Quest’ultimo potrebbe essere uno scriba specializzato, ma potrebbe anche essere un membro di un gruppo laico; nel secondo caso la professione laica degli agrimensori sembrerebbe coetanea alla professione autonoma degli scribi.

La matematica usata ai tempi dei sargonidi non sparì con il crollo del loro impero, anche se abbiamo poche testimonianze dirette di ciò che si faceva nelle città tornate indipendenti. Il periodo di Ur III, invece, rappresenta un cambiamento fondamentale.

Il momento cruciale non fu la fondazione della dinastia nel 2112, ma una riforma militare nel 2074 e una riforma amministrativa l’anno successivo (certamente per molti versi già preparata). Secondo regole che, forse, inizialmente rappresentavano uno stato di emergenza ma che poi sarebbero diventate permanenti, la stragrande maggioranza dei lavoratori del nucleo dell’impero venivano integrati in truppe di lavoro, comandate da scribi che erano responsabili del lavoro del gruppo calcolato secondo norme fisse (tanta terra scavata e tanta terra portata per una certa distanza in un giorno, ecc.) e convertito in unità astratte (talvolta $^{1}/_{60}$ di un giorno lavorativo, talvolta unità di peso di argento o di grano). Per ogni mese (anche se lungo soltanto 29 giorni) il capo doveva far prestare agli operai il lavoro di 30 giorni. I lavoratori dati in prestito a colleghi, quelli malati, fuggiti e morti venivano messi nel credito, quelli presi in prestito nel debito. Il deficit dello scriba si accumulava di anno in anno (i saldi attivi sono rarissimi). Alla sua morte la famiglia ne era responsabile; se non era in grado di pagare, i familiari venivano integrati nelle truppe di lavoro.[3] Le tavolette di ragioneria dell’epoca si contano in decine di migliaie.

Calcolare tutta un’economia centralizzata è una sfida. Le addizioni e le sottrazioni si potevano fare senza difficoltà con i mezzi tradizionali. Si usava una specie di abaco, probabilmente con rappresentazioni differenti per le unità e le decine. Pare che tale abaco avesse cinque «colonne sessagesimali», e che metaforicamente veniva chiamato «la mano». Difficili erano invece le moltiplicazioni e le divisioni, e di queste ve ne erano tante; il fatto che le metrologie non fossero completamente

---

[3] L’assiriologo Robert Englund, che ha decifrato il sistema negli anni ’80, ne parlava come una «Kapo economy».

sessagesimali complicava il compito (per esempio, l'unità fondamentale di lunghezza, un nindan – una «pertica» lunga 6 metri – consisteva di 12 kush / «cubiti», e ognuno di essi di 30 «diti»).

Per facilitare la faccenda c'era bisogno di apportare parecchie innovazioni. Dapprima si creò, per i calcoli intermedi, una numerazione di posizione «a virgola mobile» e base 60 – cioè, il numero che viene traslitterato 12.40 poteva significare $12\times60+40 = 760$ (in questo caso usiamo la trascrizione 12,40), ma anche $12+{}^{40}/_{60} = 12^2/_3$ (trascritto 12;40) o ogni altro numero $60^n\times12^2/_3$, n positivo o negativo. Inoltre venivano prodotte tabelle dei reciproci (così, la divisione per n era ridotta a una moltiplicazione per ${}^1/_n$) e dei prodotti dei numeri importanti, particolarmente quelli che si trovano nella tabella dei reciproci, con i numeri 1, 2, 3, ..., 19, 20, 30, 40, 50, e tabelle metrologiche che esprimevano le varie unità metrologiche in termini sessagesimale di una unità di base (per esempio, un kush come 5 – cioè ${}^5/_{60}$ – nindan, e un dito come 10 – cioè, ${}^{10}/_{3600}$ – nindan). Infine, si creavano tabelle di costanti tecniche, per esempio, quanta terra un lavoratore doveva scavare in un giorno.

Il passo decisivo non era *l'invenzione* del sistema di posizione; probabilmente non c'era neanche bisogno di un'invenzione, poiché il principio era inerente all'abaco. Eppure, senza tabelle a portata di ogni scriba (meglio se imparate a memoria) il sistema di posizione non sarebbe servito a niente; la sua attuazione presupponeva una decisione a livello statale e una riforma nel sillabo della scuola.

La riforma comportava anche un'eliminazione. I soli documenti matematici di tipo scolastico che sono stati trovati sono, come più di mille anni prima a Uruk, documenti-modello. Anche essi sono pochi, e l'assenza di problemi sopra-utilitari di per sé non dimostra molto – potrebbe essere dovuto al fatto che gli archeologi non abbiano mai trovato una scuola del periodo. È più significativo il fatto che tutto il vocabolario necessario per formulare tali problemi sia stato ricostruito nel periodo successivo, come se esso risultasse assente dal sumerico. Pare che persino quel minimo di libertà intellettuale che comporta la soluzione di problemi matematici non potesse essere permesso agli scribi-sorveglianti.

Allo stesso tempo – può sembrare un paradosso – la figura dello scriba veniva celebrata. Shulgi, il re responsabile della riforma del 2074 / 73, fa raccontare nei suoi inni panegirici che egli dominava tutta l'arte dello scriba. Comunque, per quanto riguarda la matematica dice soltanto di avere imparato a addizionare, sottrarre, contare e fare la contabilità; dato che per il resto si vanta di tutte le prodezze possibili (e impossibili) sembra veramente che la matematica dello scriba non dovesse andare oltre questo livello.

Il re si vanta anche di essere la giustizia in persona; a parte luoghi comuni vecchi di secoli, la sua giustizia è quella della riforma metrologica e della ragioneria; come già nel dominio di Uruk nel quarto millennio, lo stato di Shulgi si legittimava come manifestazione della giustizia, e la giustizia consisteva nel fatto che lo sfruttamento – sfruttamento estremo, lo dimostra la registrazione scrupolosa delle razioni di cibo elargite ai lavoratori e della mortalità di essi – non era arbitrario ma matematicamente controllato («con precisione chirurgica», si direbbe oggi).

4. *Acme paleobabilonese*

L'impero di Ur III non durò. Già nel 2025 le regioni periferiche si ribellarono, e un ventennio dopo anche il centro dell'impero si dissolse in piccoli stati. Gradualmente, alcuni di essi assorbirono gli altri, e nel secolo diciottesimo Hammurapi di Babilon riuscì a sottomettere tutto il sud e il centro; da quel momento si può parlare di questa regione come della «Babilonia». Il periodo dal 2000 fino al 1600 si dice «paleobabilonese»; produsse una matematica avanzata.

Neanche il Taylorismo di Ur III durò. Il periodo paleobabilonese è caratterizzato da individualismo, sia a livello economico (anche se è troppo presto per parlare di una vera economia di mercato) che a livello culturale. La terra, invece che essere lavorata da truppe di lavoro, spesso veniva data in appalto a locatari con contratto. Nascono le corrispondenze private (commerciali e personali; famose sono le lettere di Hammurapi stesso), scritte spesso da scribi free lance, e la ragioneria privata gestita da scribi con impiego privato; il sigillo diventa un segno identificativo personale e non di uffizio. Emerge, possiamo dire, *un'ideologia dell'identità personale*.

Importante per il nostro soggetto è la manifestazione particolare di quest'ideologia tra gli scribi – manifestazione particolare che conosciamo assai bene grazie ai testi usati nella scuola per fare capire agli studenti ciò che è un *vero* scriba.

La lingua sumerica era morta, ed era possibile scrivere in babilonese in modo fonetico con un sillabario di 70 segni o meno; ma un vero scriba usava anche tanti logogrammi – gli stessi della scrittura sumerica, benché ora pronunciati in babilonese. Ma questo non bastava per dimostrare che lo scriba era una persona fuori dal comune. Doveva anche essere in grado di leggere, scrivere *e parlare* il sumerico – bravura che soltanto gli altri scribi potevano apprezzare.[4] Doveva sapere tutto su testi bilingue, doveva conoscere tutti i significati dei caratteri cuneiformi – il significato fonetico (o fonetici, perché spesso ce n'era più di uno), i significati logografici normali, e vari significati occulti (tanto in sumerico quanto in babilonese); e doveva comprendere la musica e la matematica. Il tutto si chiamava (è vero!) *umanesimo* (nam-lú-ulù, sumerico per «il fatto di essere un uomo» – poiché lú corrisponde al latino *vir* potremmo anche tradurre *virtuosismo*, se non fosse dimenticata adesso l'etimologia di questa parola).

Purtroppo i testi che servivano per inculcare l'ideologia professionale degli scribi non specificano *quale* fosse la matematica che serviva a scopi «umanistici». Descriviamo dunque dapprima la matematica che si insegnava nella scuola; dopo sarà più facile fare delle supposizioni.

Lasciamo da parte i testi economici (per esempio, di ragioneria) dove compaiono numeri; essi danno informazioni sulla metrologia, ma a parte questo confermano soltanto che le tecniche sviluppate nel terzo millennio – in particolare durante il periodo di Ur III – funzionavano ancora. Per conoscere il pensiero e il sapere matematici dobbiamo considerare i testi matematici in senso stretto.

Di essi ne esistono tre tipi principali (non esauriscono completamente il materiale): tabelle, «calcoli nudi» e problemi. Oltre alle tabelle dei reciproci e dei prodotti e alle tabelle metrologiche e di costanti tecniche, erano tabulati i quadrati, i cubi e i numeri del tipo $n^2 \times (n+1)$. I «calcoli nudi» di solito danno prodotti, quadrati o reciproci di numeri (oltre a

---

[4] Veramente bravura. Il sumerico e il babilonese sono differenti come il basco e lo spagnolo; oltre al vocabolario gli scribi dovevano dunque capire gli elementi di una grammatica totalmente differente dalla loro. Senza le liste lessicali preparate dai maestri babilonesi e le loro spiegazioni sarebbe stato impossibile in età moderna decifrare i testi sumerici.

quelli contenuti nella tabella standard). Spesso si trovano sul retro di tavolette che portano proverbi o altri frammenti di letteratura sumerica; gli studenti che imparavano il calcolo elementare si trovavano dunque a un livello già avanzato nell'apprendimento della scrittura e della lingua.

Il livello avanzato *della matematica* si vede nel corpus dei testi di problemi. Questo corpus può essere suddiviso in più modi. Certi testi contengono uno o due problemi, altri un numero più grande. Degli ultimi, certuni sono «tematici», altri invece sono «antologie» e contengono un miscuglio di problemi diversi; intanto, è notevole che non esistano testi che combinano problemi matematici con altri argomenti, neanche con materie numerologiche. *La matematica* come disciplina coerente e delimitata è dunque un concetto non soltanto nostro, ma anche degli scribi paleobabilonesi.

Sia le antologie sia i testi che contengono pochi problemi di solito indicano non soltanto l'enunciato dei problemi ma spiegano anche il procedimento da seguire. Lo fanno anche certi testi tematici, altri invece sono «cataloghi» che indicano soltanto enunciati di problemi (forse insieme alla soluzione, ciò che permetteva il controllo). Si può pensare che i cataloghi permettessero al maestro di dare problemi analoghi ma differenti ai suoi studenti.

I problemi possono essere categorizzati secondo la materia o secondo il metodo che viene applicato. Comunque, certi problemi che trattano, per esempio, il volume di uno scavo prismatico possono essere risolto tramite la formula del volume; altri richiedono applicazione di metodi «algebrici» (vedere sotto), altri ancora di metodi che siamo tentati di caratterizzare come «teoria dei numeri». Perciò è meglio discutere dapprima i metodi di base, che sono anche quelli che di solito hanno un'applicazione reale, per concentrarci dopo sulle materie sopra-utilitarie (che presuppongono appunto i metodi di base).

Per tutta la pratica, la proporzionalità (ma non una teoria delle proporzioni come quella greca!) e la proporzionalità inversa sono fondamentali. Esse risultano necessarie per l'uso delle tabelle di costanti tecniche: se un solo uomo può portare 540 mattoni di un certo tipo per 30 nindan in un giorno (una costante tecnica), quanti giorni-uomo ci vuole per trasportare N mattoni per M nindan? Nei calcoli geometrici veniva anche usato il fatto che tutte le lunghezze in una configurazione di forma ben definita sono proporzionali, e che le aree sono proporzionali al quadrato di una dimensione lineare; in entrambi casi, i fattori di proporzionalità erano elencati nelle tabelle di costanti tecniche. Di solito i parametri di base erano estensioni esterne; per esempio, il perimetro e non il diametro di un cerchio.

L'area di un cerchio veniva dunque calcolata come $^1/_{12}$ del quadrato (geometrico!) costruito sul perimetro, quella di un semi-cerchio invece come $^1/_4$ del prodotto del diametro (esterno in questo caso) e del semi-perimetro. La ragione è ovvia: per gli oggetti materiali, le dimensioni esterne sono quelle più facilmente misurabili.

Non c'era un concetto di angolo come quantità misurabile; si distingueva fra angoli praticamente retti (angoli rilevanti per il calcolo delle aree) e angoli obliqui (e perciò irrilevanti). Le superfici reali venivano suddivise in quadrilateri e triangoli praticamente rettangoli; per i quadrilateri i cui lati opposti non erano esattamente uguali si usava allora la «formula degli agrimensori»: la lunghezza media moltiplicata per la larghezza media. Per i triangoli, si moltiplicava *la* lunghezza – cioè, quella rilevante, quella praticamente perpendicolare alla larghezza – per la metà di essa.[5] Tutto questo risaliva almeno a Ur III, molto probabilmente al quarto millennio.

I volumi prismatici si calcolavano come facciamo noi, con una particolarità. L'unità standard per la distanza orizzontale era il nindan (una "pertica" di circa 6 m), ma per la distanza verticale era il kush ($^1/_{12}$

---

[5] È una leggenda che i babilonesi trovarono l'area di un triangolo generico a partire da due lati qualsiasi; questo è chiaramente provato dalle piante di terreni che ci sono pervenute. Ma era solito interpretare una descrizione matematica come un riferimento alla situazione più semplice a cui poteva corrispondere. La parola che noi traduciamo «triangolo» (letteralmente sarebbe «chiodo») è dunque un triangolo in cui l'area si trova in modo abbastanza preciso bene come il prodotto della lunghezza (distinta dalla «lunghezza lunga», l'ipotenusa) con la semi-larghezza. In modo simile, «lunghezza-larghezza» era l'espressione per un rettangolo. Non deve stupirsi il lettore che sa che un «rettangolo» che non viene specificato deve essere un quadrilatero, non un triangolo rettangolo – la lingua matematica è sempre economica, e l'economia presuppone le abitudini dell'ambiente matematico locale.

nindan, circa 50 cm). La misura di base per le aree era dunque il sar, un nindan^2 – ma la stessa unità serviva per misurare i volumi, poiché si intendeva come provvista di un’altezza «virtuale» di un kush. Per calcolare un volume prismatico con base B sar e altezza a kush si «sollevava» B dall’altezza virtuale 1 all’altezza reale a. Questo essendo un’operazione di proporzionalità, il verbo *sollevare* veniva usato poi in modo generale per tutte le moltiplicazioni basate sulla proporzionalità – e dunque per tutte quelle basate su costanti tecniche.

Il volume di un tronco di cono veniva trovato come il prodotto dell’altezza per la sezione trasversale tagliate a metà altezza. In un testo si propone di trovare il volume di un tronco di piramide nello stesso modo. In un altro si trova il risultato corretto; è impossibile sapere se anche il ragionamento sottostante sia valido.

Al limite tra «utile» e «sopra-utilitario» si può menzionare che il «teorema di Pitagora» era conosciuto, ovviamente non come teorema – non esistono teoremi nella matematica babilonese – ma come regola (viene citato come tale in un testo).

Il livello sopra-utilitario ha due componenti principali (anche se non esaustive). Una è la cosiddetta «algebra».

I problemi «algebrici» parlano dei lati e delle aree di rettangoli e quadrati. Quando furono scoperti intorno al 1930 si credeva che questa lingua geometrica fosse superficiale, che i lati fossero da intendere come numeri algebrici incogniti, e le aree come prodotti. Un’analisi precisa del vocabolario dimostra tuttavia che questa interpretazione non regge: non riesce a spiegare perché i testi distinguano due operazioni additive differenti (cioè, operazioni che nell’interpretazione numerica vengono tradotte come addizione), due operazioni sottrattive differenti, due «metà» differenti, e quattro «moltiplicazioni»; certe frasi ricorrenti, inoltre, non sembrano avere senso e non appaiono nelle traduzioni, e certe procedure si spiegano male. Invece, se accettiamo le parole geometriche dei testi, tutto si chiarisce.

Il nucleo della disciplina è costituito da due problemi sui rettangoli e due sui quadrati. Quelli sui rettangoli formano un gruppo con altri due già nati in epoca sargonica. Se $\sqsubset\!\sqsupset(u,v)$ sta per l’area di un rettangolo con lati u e v, il gruppo è questo:

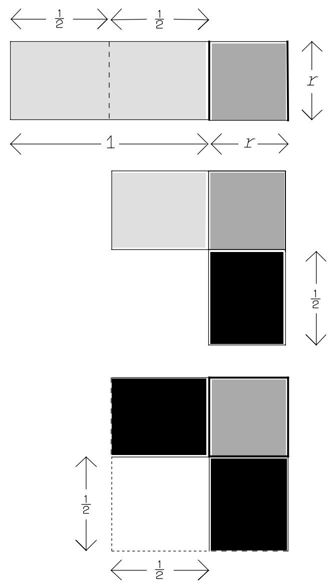
(1) $\sqsubset\!\sqsupset(u,v) = \alpha\ ,\ \ u = \beta$ (3) $\sqsubset\!\sqsupset(u,v) = \alpha\ ,\ \ u+v = \beta$

(2) $\sqsubset\!\!\sqsupset(u,v) = \alpha\ ,\ \ v = \beta$ (4) $\sqsubset\!\!\sqsupset(u,v) = \alpha\ ,\ \ u - v = \beta$

Con i metodi sviluppati durante Ur III, (1) e (2) richiedono soltanto l'uso delle tabelle metrologiche, dei reciproci e dei prodotti. (3) e (4), invece, sono di secondo grado. Lo sono anche i due problemi fondamentali sui quadrati:

(5) $\square(r)+\alpha r = \beta$ (6) $\square(r)-\alpha r = \beta$

Guardiamo da vicino un esempio del tipo (5), il primo problema della tavoletta BM 13901. In traduzione (anche dei numeri sessagesimali) si esprime così:



1. Ho messo insieme la superficie e il mio confronto: è $^3/_4$. 1 lo sporgente
2. tu poni, mezza-parte di 1 tu rompi, fai che $^1/_2$ e $^1/_2$ tengono,
3. $^1/_4$ a $^3/_4$ tu aggiungi: vicino a 1, 1 è equilaterale. $^1/_2$ che hai fatto tenere
4. dal corpo di 1 tu strappi: $^1/_2$ è il confronto.

Dapprima occorre qualche spiegazione terminologica. Un *confronto*, cioè «una situazione caratterizzata dal confronto fra uguali», denomina la configurazione quadratica; numericamente coincide con il lato del quadrato. In accordo con la definizione euclidea della nozione di «figura» (il contenuto), il nostro quadrato *è* la sua area (per esempio, 4 m^2) e *possiede* un lato (2 m); il «confronto», invece, è il suo lato e possiede un'area (vediamo ancora il ruolo fondamentale dell'elemento esterno). *Mettere insieme* è un'operazione additiva simmetrica che permette di addizionare misure numeriche anche se le entità misurate non appartengono alla stessa categoria (per esempio, aree e lunghezze, o giorni, mattoni e lavoratori). *Aggiungere*, invece, è un'operazione additiva asimmetrica che si usa solo per operazioni che hanno un senso concreto. Lo «sporgente» è una linea di lunghezza 1; applicata perpendicolarmente a una linea di lunghezza r produce un rettangolo con area $r\times 1 = r$. La *mezza-parte* è una metà «naturale», una metà che non potrebbe essere che la metà;[6] *rompere* è

[6] Il raggio di un cerchiò è la mezza-parte del diametro; l'area di un triangolo rettangolo è il prodotto della lunghezza con la mezza-parte della

l'operazione che produce una tale mezza-parte. *Fare che* le linee *a* e *b tengono* si riferisce alla costruzione del rettangolo contenuto all'interno dei lati *a* e *b*. Che *vicino a A, b sia equilaterale* vuol dire che *b* è il lato dell'area *A* formata come quadrato. *Strappare* è un'operazione sottrattiva concreta, inversa a quella di «aggiungere»; «strappare *p* da *T*» presuppone che *p* sia una parte di un totale *T* (nel caso presente persino del *corpo* di *T*).

Sappiamo dunque che la somma numerica dell'area di un quadrato (grigio scuro nel diagramma) e del suo lato *r* è $^3/_4$. Per convertire questo in una situazione che abbia un'interpretazione concreta si pone (diagramma in alto) uno «sporgente» dal lato del quadrato; questo produce un rettangolo (grigio chiaro) con area uguale al lato. Presi insieme il rettangolo e il quadrato originale formano l'area $^3/_4$. Poi, lo sporgente viene rotto in due, e una mezza-parte (insieme alla parte del rettangolo che rappresenta) mossa in modo da contenere con l'altra mezza-parte un rettangolo (ovviamente quadrato), con area $^1/_2 \times ^1/_2 = ^1/_4$. Questo nuovo quadrato si aggiunge alla figura grigia (scuro+chiaro), la cui area è ancora $^3/_4$. Il totale è un quadrato con area $^3/_4 + ^1/_4 = 1$, e dunque con lato 1. Una volta tolta la mezza-parte aggiunta sotto il quadrato rimane $1 - ^1/_2 = ^1/_2$, che è il lato del quadrato originale.

I passi corrispondono bene al nostro modo di risolvere l'equazione analoga:

$$\begin{aligned} x^2 + 1\cdot x = {}^3/_4 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 1\cdot x + ({}^1/_2)^2 = {}^3/_4 + ({}^1/_2)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + 1\cdot x + ({}^1/_2)^2 = {}^3/_4 + {}^1/_4 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (x + {}^1/_2)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x + {}^1/_2 = \sqrt{1} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 - {}^1/_2 = {}^1/_2 \end{aligned}$$

Però, l'analogia va oltre l'omomorfia dei passi. Come il nostro, anche il procedimento babilonese è *analitico*, cioè, la grandezza incognita è trattata come se fosse una grandezza normale, e attraverso i passi resi possibili in questo modo si separa gradualmente dalla relazione complessa nella quale è inizialmente intrecciata. Inoltre, come noi, anche il calcolatore babilonese procede in modo «ingenuo», cioè, non discute perché le trasformazioni sono valide né sotto quale condizioni lo siano. Ovviamente

---

larghezza.

è possibile per noi trasformare il procedimento in un argomento critico, un argomento che discute validità e condizioni (esattamente la definizione che dà Kant della «critica»), precisando per esempio che il penultimo passo è valido soltanto se restiamo nel dominio dei numeri non-negativi; ma di solito non lo facciamo, anche per noi è più economico non fare critica esplicita nelle situazioni che conosciamo bene e prendere per ovvio ciò che sembra ovvio.

La procedura usata per i problemi di tipo (5) vale anche per quelli di tipo (4) e (6): il trucco dello sporgente – usato anche nel tipo (6) – permette di trovare esattamente il rettangolo con nota differenza fra i lati, cioè, si riduce al tipo (4). Il tipo (3) richiede un procedimento differente, ma dello stesso genere – corrisponde a quello degli *Elementi* II.5, mentre il tipo (4) corrisponde al caso *Elementi* II.6. Problemi non-normalizzati venivano normalizzati tramite un «cambiamento di variabile» – $\alpha\square(r)+\beta r = \gamma$ diventando $\square(\alpha r)+\beta(\alpha r) = \alpha\gamma$.

Questi metodi, insieme alle tecniche per trasformare relazioni lineari, costituivano «gli elementi» dell'«algebra» paleobabilonese. Permettevano di risolvere problemi su 2, 3 o più quadrati con relazioni lineari note fra i lati e le aree; permettevano anche di risolvere i problemi «duali» dove erano noti i lati e incogniti i parametri delle relazioni; permettevano di risolvere problemi biquadratici – in un testo persino un problema bi-biquadratico. Inoltre servivano per risolvere problemi non-geometrici – una lunghezza può rappresentare un prezzo, un numero di lavoratori o un numero della tabella dei reciproci, e in un problema biquadratico un'area. La geometria delle linee e delle aree misurabili funzionava dunque come rappresentazione neutra, funzionalmente astratta; sotto tutti gli aspetti, a parte che la rappresentazione neutra era geometrica e non numerica, l'«algebra» paleobabilonese era dunque un'algebra nello stesso senso dell'algebra delle equazioni delle matematiche applicate.

Il punto di partenza dell'algebra sembra essere stato un prestito dall'ambiente laico degli agrimensori. L'altro aspetto principale del livello sopra-utilitario esplorava le proprietà del sistema sessagesimale; il suo punto di partenza era dunque la tradizione di calcolo degli scribi.

Un gioco abbastanza semplice è la costruzione di prodotti in sequenza: moltiplicando per esempio dapprima 9 per 9, dopo il risultato per 9, ecc., fino a 9^{10} (ma senza indicare il numero del prodotto, cioè l'esponente).

Semplice (e appena sopra-utilitaria) è anche una delle tecniche per trovare i reciproci di numeri "regolari" rispetto al sistema sessagesimale (numeri del tipo $2^p3^q5^r$, p, q e r interi) ma che non appaiono nella tabella standard: se $\tilde{n}$ è il reciproco di n e $\bar{a}$ quello di a (nella pratica, con a = 2, 3 o 5), allora $\bar{a}\times\tilde{n}$ è il reciproco di $a\times n$.

Raffinata è invece un'altra tecnica, che si può usare per trovare per esempio (esempio semplice!) il reciproco di 1.51.6.40 (ricordiamoci che la trascrizione con i punti è a virgola mobile). Dalla tabella standard si sa che 6.40 è il reciproco di 9; moltiplichiamo dunque per 9 per eliminare le ultime due posizioni; troviamo 16.40. 6.40 è $^1/_9$, moltiplichiamo dunque per 9, ciò che da 2.30. 1.51.6.40 è quindi 2.30 / (9×9), e poiché il reciproco di 2.30 è 24, quello di 1.51.6.40 è 24×9×9 = 32.24.

Era anche possibile combinare la «teoria dei numeri» con l'algebra. Infatti, certi problemi sugli scavi prismatici si riducono mediante metodi appartenenti all'algebra a problemi sui numeri. Diamo alcuni esempi: trovare un numero p tale che $p\times p\times(p+1) = 4{,}12$; trovare p tale che $p\times p\times(p+7) = 8$; trovare tre numeri p, q e r tali che $p\times q\times r = 0;36$, $p+q = 1$, $r = p+0;6$. Il primo caso si risolve, dice il testo, per mezzo della tabella «equilaterale, uno aggiunto», cioè la tabulazione di $n^2\times(n+1)$; negli altri casi la soluzione deve essere indovinata o facilitata da una fattorizzazione. Un'altra combinazione di «algebra» e teoria dei numeri si trova nella famosa tavoletta Plimpton 322; essa utilizza coppie di numeri vicendevolmente reciproci per costruire triplette pitagoriche, *forse* con lo scopo di costruire problemi algebrici risolvibili.

Né a livello utilitario, né a quello sopra-utiliario esiste un solo teorema esplicito. Un paio di testi contengono regole formulate in modo astratto. Tutti sono vicini all'ambiente laico; sembra che la scuola abbia rinunciato all'uso di tali regole come pedagogicamente inefficienti. Invece, si usavano come metodo didattico generale esempi paradigmatici accompagnati da spiegazioni. Di solito tali spiegazioni erano orali e non hanno lasciato molte tracce; ma l'esistenza di un paio di testi espliciti ci permette di riconoscere vestigia della didattica orale anche in altri testi.

Tutti i testi matematici sono testi scolastici; anche le tabelle venivano copiate nella scuola come mezzo per impararle a memoria. È ovvio che il livello di base servirebbe per il lavoro futuro degli studenti. Ma né l'algebra di secondo grado, né il calcolo dei reciproci oltre a quelli semplici potrebbero mai fare questo. Come la scrittura sumerica, esse furono cose che soltanto gli altri scribi potevano apprezzare; dobbiamo concludere che esse esprimono il virtuosismo degli scribi, la loro *umanità* specifica. Questo spiega anche che non c'era nessuna motivazione per sviluppare una matematica di teoremi: un re come Shulgi poté vantarsi di prodezze fisiche (fu anche un capo militare), ma lo scriba doveva soltanto vantarsi di prodezze che hanno a che fare con gli obblighi professionali: *scrivere,* non solo l'accadico parlato dal padrone ma anche cose difficilissimi, e fare *calcoli,* non soltanto quelli richiesti dallo stesso padrone ma anche quelli che il padrone non capisce. Produrre teoremi non esprimerebbe virtuosismo *di scriba.*

Per noi, un matematico non è quello che sa usare (o che insegna come usare) la matematica, sia anche matematica avanzata; è piuttosto quello che sviluppa sapere matematico. In questo senso, sembra che i maestri che insegnavano la matematica nella scuola paleobabilonese non fossero «matematici» ma piuttosto insegnanti di calcolo, compreso il calcolo troppo raffinato per servire alla pratica. Questa conclusione potrebbe però essere precipitosa, e per due ragioni.

Inanzitutto, c'è la *costruzione* dei problemi. Certamente molti problemi sono costruibili a partire da una soluzione conosciuta. Se prendiamo un quadrato con lato $^1/_2$ è ovvio che la somma dell'area e del lato è $^3/_4$, e che il problema è risolvibile tramite la tecnica descritta sopra. Se prendiamo un rettangolo con lunghezza 0;40 e larghezza 0;30 è pure ovvio che la sua area sarà 0;20, e che il rettangolo contenuto dalla diagonale e dal cubo sulla lunghezza è 0;14,48,53,20. Ma non è ovvio che queste due informazione producano un problema risolvibile (vale a dire, bi-biquadratico). Soltanto una ricerca sistematica guidata attraverso più passi intermedi – e dunque un lavoro di matematico – può dare l'idea; ma questo lavoro di matematico è stato un lavoro privato, non reclamizzato nei testi.

Un'analisi precisa della terminologia svela inoltre che varie scuole, ognuna a suo modo, si sono sforzate di creare un modo canonico per esporre la matematica e per stabilire per certi versi (in modo «critico») la sua coerenza. Lo scopo probabilmente era didattico (e forse motivato dal volersi distinguere da altre scuole); ma anche se lo scopo non era la purezza e la coerenza della matematica, questi sforzi possono caratterizzarsi come sforzi matematici (a un altro livello è ciò che ha voluto fare il gruppo Bourbaki, prendendo come si dice il *Modern Algebra* di Van der Waerden come modello prima per la topologia e poi per tutta la matematica). Anche se (come oggi) la maggior parte degli insegnanti di matematica non erano matematici, i matematici paleobabilonesi ci sono stati.

5. *Invisibilità e nuova visibilità*

L'impero di Hammurapi non si stabilizzò mai; dopo circa mezzo secolo le forze centrifughe non si lasciavano più dominare, e nel 1600 un'incursione degli Ittiti distrusse la città di Babilon. In seguito, quando un popolo tribale (i Cassiti) assoggettò l'area, cominciò ciò che è stato chiamato «il medioevo babilonese». L'urbanizzazione si ridusse fortemente, e la scuola degli scribi sparì; invece, il mestiere di scriba si trasmise all'interno delle «famiglie» – talvolta forse soltanto famiglie per adozione, spesso probabilmente vere famiglie.

Senza l'istituzione scolastica, la matematica sparisce dall'orizzonte archeologico. Il millennio che segue il collasso paleobabilonese ci ha lasciato in tutto due testi matematici: una tabella di costanti tecniche e un testo con un problema sulla divisione di un trapezio di chiara tradizione paleobabilonese ma risolto con un inganno. Nel periodo tardivo riappare la matematica degli scribi. Ciò dimostra che la matematica utilitaria è sopravvissuta; un'analisi terminologica dimostra che ambienti senza conoscenza del sumerico – dunque distinti dell'ambiente dotto degli scribi – ne sono responsabili, almeno in parte.

È forse del periodo del dominio persiano (539–330) un testo che comincia con i numeri sacri degli dei e continua con una tabella metrologica: la distinzione paleobabilonese fra numerologia e matematica dunque non esisteva più. Un altro testo trovato nello stesso posto contiene problemi geometrici di secondo grado, risolti come quelli paleobabilonesi; ma non si tratta più di un'algebra, cioè di una rappresentazione geometrica neutra. Questi problemi, infatti, sono veri problemi geometrici, e presuppongono anche una nuova metrologia che lo dimostra.[7] Sono

[7] La metrologia inglese ci permette un'analogia: trovare un rettangolo con area 10 (acres), la cui lunghezza eccede la lunghezza con 279 (yards) (1

i problemi (1)–(4) elencati sopra, e in più un'altro degli enigmi matematici della tradizione laica (trovare i lati di due quadrati concentrici, quando l'area del nastro intermedio e la sua larghezza sono dati). Un terzo testo tratta di problemi di metrologia delle aree.

Queste tavolette appartenevano a scribi che si identificavano come «esorcisti», dunque possessori di sapere occulto. Non è strano che essi non distinguessero fra numerologia sacra e matematica; è più notevole che si interessassero all'agrimensura, sia vera che fantastica, poiché questo quasi certamente non era il loro compito. Probabilmente si è trattato di un tentativo di restaurare la tradizione. Infatti si copiavano ancora i testi che inculcavano l'ideologia professionale della scuola paleobabilonese. Anche se la tradizione stessa era andata persa, non era persa ogni conoscenza del suo contenuto; per completarla, si sfruttò il sapere degli agrimensori laici – come era stato sfruttato quando la nuova scuola paleobabilonese aveva bisogno di un livello di virtuosismo.

Altri (pochi) testi matematici risalgono all'epoca seleucidica (terzo e secondo secolo). Anche essi vengono da un ambiente di scribi specializzati nella divinazione e nell'esorcismo. Comunque, nel frattempo si era sviluppata come aiuto alla divinazione astrologica un'astronomia matematica basata su modelli numerici; perciò, una parte dell'ambiente dotto aveva un bisogno reale di sapere matematico – non di «algebra» né di altri tipi di geometria, ma di elaborazione delle tecniche legate al sistema sessagesimale. Per i calcoli astronomici non bastava più la vecchia lista di 32 coppie di reciproci; la precisione con cui si conosceva il movimento dei pianeti richiedeva un rete molto più fine. Infatti, una tabella seleucidica elenca coppie di reciproci dove un membro può avere fino a 6 «cifre» sessagesimali e l'altro ancora di più. Ma fra i tre testi seleucidici con problemi matematici, uno contiene problemi geometrici utilitari simili a quelli dell'epoca persiana; uno è tematico e tratta di problemi «algebrici» sui rettangoli, ancora risolti con la geometria «ingenua» ma con procedure che differiscono da quelle tradizionali;[8]

acre è 4840 yard^2).

8 Per esempio, i passi usati per risolvere un problema del tipo (4), cioè,

$$\sqsubset\!\sqsupset(u,v) = 2{,}0, \quad u-v = 7\ ,$$

corrispondono a questi calcoli simbolici:

infine, molti sono di un tipo nuovo che coinvolge la diagonale (per esempio, i dati sono l'area e la somma dei lati e della diagonale). L'ultimo testo è un'antologia che contiene quest'ultimo problema, ma anche problemi del tipo $n+\tilde{n} = \alpha$, dove n e $\tilde{n}$ sono numeri reciproci; matematicamente sono del tipo (3) e vengono risolti con il metodo tradizionale. Rappresentano dunque un'ovvia eredità paleobabilonese che deve essere stata trasmessa all'interno di un ambiente che usava la numerazione posizionale. Del tutto nuove sono due somme «da uno fino a dieci», $\sum_{i=1}^{10} i^2 = (1\cdot\frac{1}{3}+10\cdot\frac{2}{3})\cdot 55$, dove 55 rappresenta $\sum_{i=1}^{10} i$, e $\sum_{i=1}^{10} 2^{i-1} = 2^9+(2^9-1)$. Sia le somme «da uno fino a dieci» che i nuovi problemi sui rettangoli si ritrovano alla stessa epoca nella matematica demotica egizia, e dopo in scritti neopitagorici o di geometria pratica greco-latina. Visto che la matematica particolare degli scribi dotti non ha lasciato tracce in questi ultimi ambienti, deve trattarsi di innovazioni fatte negli ambienti dei matematici pratici (agrimensori ed altri), una volta ancora adottate dagli scribi.

6. *L'Egitto: un parallelo imperfetto*

Quasi coetanea a quella mesopotamica era la civiltà egizia. Già nel tardo quarto millennio, un po' prima dell'unificazione del paese sotto un solo faraone, emerge la scrittura; *forse* l'idea di esprimere la lingua in modo grafico è ispirata alla scrittura mesopotamica (accade durante un'epoca dove altri prestiti culturali dimostrano l'esistenza di legami), ma i principi delle due scritture differiscono abbastanza per dimostrare che la scrittura stessa è una costruzione indipendente. Lo stesso vale per la matematica.

Due elementi della matematica egizia che conosciamo da epoche posteriori sono già visibili in un'iscrizione e in una raffigurazione risalenti all'epoca dell'unificazione: la numerazione e il «sistema canonico».

La numerazione era a base dieci, con simboli distinti per 1, 10, ..., 1000000; appaiono in un'iscrizione che racconta il numero di prigionieri e di capre conquistati in una guerra (probabilmente quella di

$$(u+v)^2 = 4u\times v+(u-v)^2 = 8{,}49, \text{ dunque } u+v = \sqrt{8{,}49} = 23,$$
$$v = {}^1/_2\times(23-7) = 8,\ u = (u-v)+v = 7+8 = 15.$$

unificazione) – la legittimità delle stato egizio non era fondata sulla «giustizia calcolata» ma sulla conquista e, in seguito, sulla garanzia di ordine cosmico. Il «sistema canonico» fissa in modo dettagliato le proporzioni numeriche fra le parti del corpo umano e prescrive come disegnare la figura umana all'interno di una rete di quadrati; è a questo sistema che dobbiamo l'aspetto inconfondibile dell'arte egizia. Intorno al 3000, sotto la prima dinastia, cominciò anche la misura del livello dell'aqua del Nilo – probabilmente con l'intenziona di fissare il livello possibile delle tasse – e un rituale chiamato «stendere la corda» al momento di fondare un tempio, una testimonianza sicura che l'architettura monumentale era basata su costruzioni geometriche; sotto la seconda dinastia, all'inizio del terzo millennio, ebbe inizio un calcolo biennale «delle ricchezze del paese».

A parte questo, sappiamo poco di preciso sulla matematica del terzo millennio, il millennio dell'Antico Regno (circa 2650–circa 2150). È il millennio delle grande piramidi e di altre opere grandiose fatte con straordinaria precisione geometrica; ma la pietra non ci racconta niente di preciso né sulle tecniche *matematiche* coinvolte, né sul sapere sottostante. Ciò che è chiaro è che il sistema particolare delle frazioni – fondamentale nel secondo millennio, v. sotto – non esisteva ancora; invece si usavano (oltre alle «frazioni naturali» $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_4$, $^3/_4$) suddivisioni metrologiche. È anche noto che l'amministrazione faceva già uso di una scrittura corsiva, l'ieratico, che diventava la scrittura della matematica (certi simboli metrologici possiedono soltanto una forma ieratica, o la loro forma geroglifica è tardiva).

Soltanto nel Medio Regno (circa 2050–circa 1650) emerge ciò che siamo abituati a considerare come «matematica egizia»; questa creazione coincide con la nascita della scuola degli scribi – gli scribi del terzo millennio furono addestrasti in apprendistato.

Due grandi papiri ci presentano la matematica egizia, i papiri matematici «Rhind» e «di Mosca». Quello di Mosca sembra essere una copia di un compito di esame – più volte contiene l'osservazione «hai trovato bene»; l'altro è una copia di ciò che potrebbe essere il manuale di un docente. È dunque grazie all'esistenza della scuola che oggi siamo in possesso di fonti per la matematica del secondo millennio; ma probabilmente il contesto scolastico ha anche determinato un aspetto essenziale di essa, cioè il sistema particolare delle frazioni.

Nei testi del terzo millennio, come detto, si trovano oltre le «frazioni naturali» soltanto suddivisioni metrologiche. Per la pratica, è un sistema eccellente; nella scuola, però, ha lo svantaggio che non permette di decidere in modo univoco che «hai trovato bene». Per trovare e indicare un risultato esatto c'è bisogno di qualche sistema di frazioni.

Lì, la scuola egizia ha generalizzato e promosso a sistema una notazione di cui la prima traccia risale all'ultima parte dell'Antico Regno, un numero con soprascritto «ro» (in ieratico, come nel seguiti qui, un punto), «parte» (ma nella lingua aritmetica «aliquota», parte del tipo $^1/_n$), combinandola con la regola che un numero frazionario non può contenere la stessa aliquota due volte. 2 non era dunque $\dot{5}\ \dot{5}$ ($^1/_5+^1/_5$) ma $\dot{3}\ \dot{15}$ ($^1/_3+^1/_{15}$) di 5. Solo $^2/_3$ (vecchia frazione naturale) aveva un suo simbolo particolare (trascritto nel seguito 3"). Non meno che «l'algebra» degli scribi babilonesi, l'uso completo di questo sistema permetteva agli scribi egizi di esibire il loro virtuosismo; per vederlo, dobbiamo considerare anche altre tecniche aritmetiche.

L'addizione e la sottrazione si facevano direttamente senza difficoltà. Per moltiplicare si raddoppiava e decuplicava; per esempio, 53×75 si poteva fare in questo modo:

/1	75
/2	150
/10	750
20	1500
/40	3000
Totale	3975

L'idea è di svuotare uno dei fattori e addizionare i prodotti corrispondenti. 3 si decompone in 1 più 2. A 1 corrisponde il prodotto 75, a 2 il prodotto 150. Resta 50, di cui un primo componente è 10; 10 volte 75 è ovviamente (ovvio anche per gli egiziani, che avevano un sistema decimale anche se non di posizione) 750. Il resto (40) si ottiene raddoppiando due volte, ciò che vale anche per il prodotto corrispondente. Alla fine si addizionano i prodotti marcati con /.

Nella divisione, il dividendo viene svuotato nello stesso modo; per esempio (3975 diviso per 75):

/1	75

/10	750
20	1500
/40	3000
/2	150
Totale	3975

Sembra semplice, ma solo fino all'introduzione delle frazioni. Il prodotto 8 3" $\dot{6}$ $\dot{18}$ × 8 3" $\dot{6}$ $\dot{18}$ (8 3" $\dot{6}$ $\dot{18}$ = $8^8/_9$) è calcolato così:

1	8 3" $\dot{6}$ $\dot{18}$
2	17 3" $\dot{9}$
4	35 2' $\dot{18}$
/8	71 $\dot{9}$
/3"	5 3" $\dot{6}$ $\dot{18}$ $\dot{27}$
3'	2 3" $\dot{6}$ $\dot{12}$ $\dot{36}$ $\dot{54}$
/$\dot{6}$	1 3' $\dot{12}$ $\dot{24}$ $\dot{72}$ $\dot{108}$
/$\dot{18}$	3' $\dot{9}$ $\dot{27}$ $\dot{108}$ $\dot{324}$
Totale	79 $\dot{108}$ $\dot{324}$

Raddoppiare $\dot{18}$ è facile, dà $\dot{9}$; similmente per $\dot{6}$ e 3". Ma come raddoppiare $\dot{9}$? Per questo, i calcolatori egiziani avevano una tabulazione di tutte le divisioni $2/n$ dove n è dispari, $2<n<102$. Comunque uno dei principi per la costruzione di questa tabella sta nel calcolo di $2/9 = (1^1/_2+^1/_2)/9 = \dot{6}+\dot{18}$ – cioè, 2 si spartisce in due aliquote di 9. Alla fine tutte le frazioni devono essere sommate; per questo si trova un numero di cui tutte le aliquote possono essere trovate senza troppo difficolta – in questo caso probabilmente 108 (dunque, non esattamente un denominatore comune). La somma di tutte le frazioni di 108 sarà 217 $\dot{3}$ = 2·108+1+3', e dunque 2+$\dot{108}$+$\dot{324}$ di 108.

Ancora più difficile è la divisione per numeri che contengono frazioni; un bell'esempio (dal «Rhind» no. 37) è 1 diviso per 3 $\dot{2}$ $\dot{18}$, col risultato di 1 $\dot{4}$ $\dot{32}$; il calcolo coinvolge frazioni fino a $\dot{576}$ e richiede non poca fantasia creativa.

L'idea di esprimere una grandezza in relazione a un'altra ricorre in un metodo che si usava molto, la «semplice falsa posizione».[9] Prendiamo come esempio «Rhind» n. 24: una grandezza, se si aggiunge il suo $\dot{7}$, diventa 19. Diciamo che la grandezza sia 7, allora con il suo $\dot{7}$ diventa

9 Veniva anche praticato dagli scribi babilonesi e in tutta l'aritmetica pratica fino al Rinascimento.

8; ma dovrebbe essere 19, dunque 19/8 = $2\ \dot{2}\ \dot{8}$ volte più grande. È dunque $2\ \dot{2}\ \dot{8}$ moltiplicato per 7, cioè 1+2+4.

I due papiri contengono molti problemi di aritmetica applicata, e dall'organizzazione del «Rhind» è ovvio che era pensata come tale, poiché prima viene rappresentata l'aritmetica dei numeri astratti, poi la geometria e altre applicazioni concrete. I problemi applicati riguardano la spartizione di pani in date proporzioni, lo scambio di pani o birra in accordo col contenuto di orzo, la crescita di un gregge di buoi, ecc. – tutti problemi che corrispondevano ai compiti degli scribi come appare dai documenti economici; molti hanno a che fare con problemi metrologici. Dai documenti economici si vede che gli scribi importavano nella vita pratica il nuovo sistema delle frazioni, anche se questo non era molto adatto ai calcoli reali e se dava l'illusione di una precisione molto più grande di quella veramente raggiunta (il $\dot{180}$ di una brocca di birra!).

I problemi geometrici riguardano l'inclinazione di piramidi, le aree di rettangoli, di triangoli rettangoli e cerchi e di una superficie curva che potrebbe essere cilindrica o semisferica, e i volumi di prismi rettangolari e di un tronco di piramide (corretto). Per necessità, le formule per le aree di triangoli e rettangoli e per i volumi prismatici coincidevano al principio con quelle dei babilonesi, ma abitudini metrologiche facevano sì che esse fossero distinte nei particolari. L'area del cerchio è definita in un modo del tutto differente da quello babilonese, cioè come l'area di un quadrato il cui lato è $^8/_9$ del diametro del cerchio (dunque, alla lettera come «quadratura del cerchio»).

Da un punto di vista generale, la matematica della scuola degli scribi egiziani somiglia molto a quella della scuola paleobabilonese. C'era un nucleo di calcolo con numeri astratti, essenziale poiché il compito dello scriba che praticava la matematica era sempre quello di trovare il numero giusto; inoltre, c'era un livello utilitario in accordo con i compiti professionali degli scribi; infine, c'era un livello determinato dalla dinamica dell'istituzione scolastica – in Babilonia un vero e proprio livello di sapere sopra-utilitario, in Egitto un calcolo più raffinato del necessario.

Dal Nuovo Regno (circa 1550–circa 1070) e dalla prima metà del primo millennio non abbiamo grandi documenti matematici, ma documenti economici suggeriscono che le tecniche matematiche restavano le stesse. Dall'epoca demotica (la seconda metà del primo millennio), più precisamente dalle epoche tolemaica e romana, ci sono nuovi papiri matematici.

Fondamentalmente, non ci sono grandi cambiamenti, ma il tutto dà l'impressione di regole canoniche meno rigide o meno rispettate (un po' come l'impressione che dà l'arte visuale della tradizione egizia della stessa epoca). Ci sono anche nuovi tipi di problemi (ne abbiamo parlato) e nuove formule, spesso meno precise di quelle dell'epoca faraonica e talvolta apparentemente influenzate dalla matematica mesopotamica – per esempio, l'area del cerchio si trova come $^3/_4$ dell'area del quadrato circoscritto, il volume di un tronco di cono viene calcolato come nei testi paleobabilonesi. Non può stupirci, se per secoli non soltanto le armate ma anche gli amministratori assiri e persiani (con i loro scribi) davano gli ordini.

7. *Eredità*

Le matematiche babilonesi e egizie sono morte, come lo sono le culture di cui facevano parte. Sono sparite senza lasciare tracce vive?

Di certo no. Prima di tutto, conosciamo la divisione sessagesimale del tempo e del grado. Potrebbe essere un rudimento; ma anche l'uso di frazioni decimali, cioè il sistema completo di posizione fu ispirato nel medioevo dalla divisione del grado (ecc.) in minuti, secondi, terzi, quarti ecc. È anche possibile che il sistema decimale di posizione degli Indiani sia di ispirazione mesopotamica (fu inventato quando essi conoscevano già l'astronomia babilonese), ma non è molto probabile.

Sono stati i greci ellenistici ad adottare le frazioni sessagesimali per uso astronomico; già molto prima i greci adottarono l'uso egizio delle parti aliquote, ma senza rispettare troppo il canone che regolava questo sistema ai tempi dei faraoni. I greci stessi sostengono anche di aver imparato la geometria dagli egiziani – Erodoto specificamente dagli «stenditori della corda». Per certi versi può essere vero; la geometria greca probabilmente ha molti radici, e non c'è dubbio che l'arte arcaica abbia imparato dal sistema canonico egizio. Tuttavia, gli aspetti della geometria che gli autori greci attribuiscono a Pitagora (il suo «teorema», l'applicazione delle aree con eccesso e difetto, cioè *Elementi* II.5–6) non si ritrovano nella matematica faraonica ma bensì in quella paleobabilonese. Infatti, quando «l'algebra» babilonese fu scoperta e interpretata in chiave numerica, la convinzione di Neugebauer era che la cosiddetta «algebra geometrica» degli *Elementi* II fosse una traduzione geometrica del sapere numerico dei babilonesi. A un certo momento questo punto di vista sollevava obiezioni da parte di autori che sapevano poco sulla matematica babilonese, obiezioni che però perdono ogni valore di fronte all'interpretazione geometrica; non c'è comunque una linea diretta che va dagli scribi paleobabilonesi alla geometria greca. Come abbiamo visto, la tradizione alta paleobabilonese si interruppe quando sparì la scuola; ciò che i greci hanno incontrato è la tradizione laica (e non è escluso che l'abbiano incontrato in Egitto dopo l'arrivo degli amministratori assiri e persiani); infatti, tutto ciò in Euclide (e Diofanto) che ha un sapore mesopotamico apparteneva alla tradizione laica, e niente di quello che nella matematica scolastica va oltre gli agrimensori laici si ritrova nella matematica greca.

Come già menzionato, le innovazioni nella tradizione laica che vediamo nei testi seleucidici e demotici si rispecchiano in testi greco-latini neopitagorici e di geometria pratica, senza però avere molta importanza per la storia. Molto importante è invece l'influenza nell'algebra di al-Khwārizmī. Non ci sono ragioni di credere che l'algebra tradizionale che il califfo al-Ma'mūn ha voluto che al-Khwārizmī descrivesse fosse ispirata all'algebra babilonese, né agli agrimensori laici; ma al-Khwārizmī, sapendo che nella matematica c'è bisogno di dimostrazioni, ha voluto procurare prove che le regole numeriche enunciate fossero valide; per questo ha usato le tecniche della tradizione degli agrimensori, ancora viva al suo tempo. Una volta che l'algebra di al-Khwārizmī fu tradotta in latino sembrava che queste prove costituissero il nucleo stesso della disciplina. Anche le dimostrazioni di Cardano per le soluzioni dell'equazione di terzo grado ne furono ispirate; inoltre esse facevano uso diretto delle soluzioni dei problemi (3) e (4) sui rettangoli, che Cardano conosceva bene dalla tradizione abbacista.

8. *Notizie bibliografiche*

Per il soggetto di etnomatematica, vedere [Ascher 1991]; per il sistema dei gettoni [Schmandt-Besserat 1992].

[Nissen 1988] discute la storia mesopotamica del quarto e terzo millennio, [Liverani 1988] va fino alla conquista persiana. [Damerow & Englund 1987] presentano le metrologie di Uruk, [Nissen, Damerow & Englund 1993] le tecniche di ragioneria fino a Ur III.

Per la matematica del terzo millennio, vedere [Friberg 1986; Høyrup 1982; Foster & Robson 2003]. Le collezioni principali di testi paleobabilonesi e seleucidici sono [Neugebauer 1935; Neugebauer & Sachs 1945; Bruins & Rutten 1961]; per i testi tardivi ma pre-seleucidici, vedere [Friberg, Hunger & al-Ravi 1990; Friberg 1997]. [Robson 1999] affronta la matematica pratica e il calcolo numerico di Ur III e dell'epoca paleobabilonese, [Høyrup 2002] l'algebra paleobabilonese e successiva, e inoltre la tradizione laica e la sua eredità. Per quanto riguarda l'abaco, vedere [Proust 2000].

I testi matematici egizi sono tradotti in [Clagett 1999], che contiene anche riproduzioni delle edizioni e trascrizioni originali insieme a una presentazione globale. [Iversen 1975] tratta il «sistema canonico».

9. *Bibliografia*

Ascher, Marcia, 1991. *Ethnomathematics.* Pacific Grove, California: Brooks / Cole Publishing

Bruins, E. M., & M. Rutten, 1961. *Textes mathématiques de Suse*. Paris: Paul Geuthner.

Clagett, Marshall, 1999. *Ancient Egyptian Science. A Source Book.* Volume III. *Ancient Egyptian Mathematics.* Philadelphia: American Philosophical Society, 1999.

Damerow, Peter, & Robert K. Englund, 1987. "Die Zahlzeichensysteme der Archaischen Texte aus Uruk", Kapitel 3 (pp. 117–166) *in* M. W. Green & Hans J. Nissen, *Zeichenliste der Archaischen Texte aus Uruk*, Bd II. Berlin: Gebr. Mann.

Foster, Benjamin, & Eleanor Robson, 2004. "A New Look at the Sargonic Mathematical Corpus". *Zeitschrift für Assyriologie und Vorderasiatische Archäologie* **94**, 1–15.

Friberg, Jöran, 1986. "The Early Roots of Babylonian Mathematics. III: Three Remarkable Texts from Ancient Ebla". *Vicino Oriente* **6**, 3–25.

Friberg, Jöran, 1997. "'Seed and Reeds Continued'. Another Metro-Mathematical Topic Text from Late Babylonian Uruk". *Baghdader Mitteilungen* **28**, 251–365, pl. 45–46.

Friberg, Jöran, Hermann Hunger & Farouk N. H. al-Rawi, 1990. "»Seeds and Reeds«: A Metro-Mathematical Topic Text from Late Babylonian Uruk". *Baghdader Mitteilungen* **21**, 483–557, Tafel 46–48.

Høyrup, Jens, 1982. “Investigations of an Early Sumerian Division Problem, c. 2500 B.C.”. *Historia Mathematica* **9**, 19–36.

Høyrup, Jens, 2002. *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.

Iversen, Erik, 1975. *Canon and Proportion in Egyptian Art*. Second Edition Fully Revised. Warminster, England: Aris & Phillips.

Liverani, Mario, 1988. *Antico Oriente. Storia, società, economia*. Roma & Bari: Laterza.

Neugebauer, O., 1935. *Mathematische Keilschrift-Texte*. I-III. Berlin: Julius Springer, 1935–1937.

Neugebauer, O., & A. Sachs, 1945. *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven, Connecticut: American Oriental Society.

Nissen, Hans J., 1988. *The Early History of the Ancient Near East*. Chicago & London: University of Chicago Press.

Nissen, Hans J., Peter Damerow & Robert Englund, 1993. *Archaic Bookkeeping: Writing and Techniques of Economic Administration in the Ancient Near East*. Chicago: Chicago University Press.

Proust, Christine, 2000. “La multiplication babylonienne: la part non écrite du calcul”. *Revue d’Histoire des Mathématiques* **6**, 293–303.

Robson, Eleanor, 1999. *Mesopotamian Mathematics 2100–1600 BC. Technical Constants in Bureaucracy and Education*. Oxford: Clarendon Press.

Schmandt-Besserat, Denise, 1992. *Before Writing*. 2 vols. Austin: University of Texas Press.